

Exercice 1[Voir correction](#)

Calculer les développements limités suivants

1) DL à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$

3) DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1+e^x}$

2) DL à l'ordre 3 en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

4) DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{\sin(x)}{e^x}$

Exercice 2[Voir correction](#)

Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

Exercice 3[Voir correction](#)

Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n \geq 1} (1 - \cos(\frac{1}{n}))$

3) $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{\cos(1/n)}{1 - \sin(1/n)} \right)$

2) $\sum_{n \geq 1} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

4) $\sum_{n \geq 1} n^{8/3} (\cos(1/n) - e^{-1/(2n^2)})$

Exercice 4[Voir correction](#)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x e^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de f .
- 3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.
- 4) Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
- 5) Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe Γ de g et préciser les positions relatives de Γ et de T au voisinage de 0

Exercice 5[Voir correction](#)

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} .

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , et préciser $f'(0)$.
- 3) Montrer que f n'est pas C^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 6[Voir correction](#)

- 1) Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 8}$.

Après avoir étudié l'ensemble de définition de f , déterminer deux asymptotes oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ à \mathcal{C}_f , la courbe représentative de f .

- 2) Mêmes questions avec la fonction g définie par $g(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$.

Exercice 7[Voir correction](#)

Soit n un entier pair et soit $P : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$. Montrer que P n'a pas de racine multiple.

Exercice 8[Voir correction](#)

Soit P un polynôme à coefficients réels.

- 1) Montrer que si λ est une racine complexe de P , alors $\bar{\lambda}$ est racine de P avec la même multiplicité que λ .
- 2) Supposons que toutes les racines réelles de P soient de multiplicité paire. Montrer que n est pair.

Exercice 9[Voir correction](#)

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

3) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$

5) $\int_0^2 \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du$

2) $\int_0^1 \ln(1+t) dt$

4) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^5}$

6) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

Exercice 10[Voir correction](#)

(ENS 2021) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

- 1) Justifier que (u_n) est bien définie et étudier son sens de variations.

2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$ et $w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln(n+1)}{e} \leq v_n$ et $0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$.

- 3) En déduire la limite de la suite (u_n)

- 4) On cherche maintenant à obtenir un résultat plus précis.

a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ est convergente.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq I$

c) En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 11[Voir correction](#)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- 1) Donner l'ensemble D des réels pour lesquels cette intégrale a un sens.
- 2) Montrer que f est dérivable sur D et que sa dérivée est $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. En déduire les variations de f .
- 3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$. Montrer que $f(x) - g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
- 4) On prolonge alors f par continuité en 1 (on note encore f ce prolongement). Étudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 12[Voir correction](#)

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, et vérifiant $f \circ f = f$. On note $a = \min \{f(x), x \in [0, 1]\}$ et $b = \max \{f(x), x \in [0, 1]\}$.

- 1) Justifier l'existence de a et de b .

- 2) Quelle est la restriction de f à $[a, b]$?
- 3) Quelles sont toutes les fonctions non constantes vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus ? On pourra considérer les valeurs de $f'(a)$ et de $f'(b)$.
- 4) Quelles sont toutes les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ vérifiant $f \circ f = f$?

Le coin des Khûbes

Exercice 13

[Voir correction](#)

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}
- 2) Justifier que la restriction de f à $]0; +\infty[$ est de classe \mathcal{C}^∞ .
- 3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$$

- 4) En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 14

[Voir correction](#)

(D'après ESCP 1994) Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- 1) Calculer u_0 et u_1 .
- 2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
- 3) a) Exprimer, pour tout $n \geq 1$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n .
b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$
- 4) Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par les conditions :

$$v_0 = a \quad \text{et pour tout entier } n \geq 1, \quad v_n = nv_{n-1} - 1$$

Montrer que si $a \neq u_0$, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est divergente.

- 5) a) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

- b) En déduire qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 , que l'on déterminera, telles qu'on ait

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$



Exercice 15

[Voir correction](#)

(ENS 2025)

- 1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n = 2x + 1$ d'inconnue x admet une unique solution positive. Cette solution est notée u_n .
- 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est monotone, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 1$.
- 3) Montrer que $\ell = 1$.
- 4) On pose $\varepsilon_n = u_n - 1$ pour tout $n \geq 2$.
 - a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(3 + 2\varepsilon_n)$.
 - b) En déduire que $n\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(3)$.



Exercice 16

[Voir correction](#)

(ENS 2025)

Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on pose :

$$f_n(x) = x - \arctan(x) - n^\alpha$$

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe un unique $x \geq 0$ tel que $f_n(x) = 0$, qu'on notera u_n dans la suite.
- 2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
- 3) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$
- 4) Démontrer que $n^\alpha(u_n - n^\alpha - \pi/2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) À l'ordre 3 au voisinage de 0 on a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$.

On compose ces deux DL en tronquant tous les termes d'ordre ≥ 4 :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3\right) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\boxed{= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \end{aligned}$$

Remarque : le terme d'ordre 3 est nul dans le DL de $e^{\sin x}$ (tout comme le terme d'ordre 2 est nul dans le DL de $\sin x$, on peut tout de même écrire $\sin x = x + o(x^2)$).

2) $\forall x \neq 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$. Or $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ donc $\frac{1}{x} \ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$ est un DL de $\frac{1}{x} \ln(1+x)$ à l'ordre 3.

Si on retire 1 à cette expression elle tend vers 0 en 0 et en composant par le DL $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1\right) &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \\ &\boxed{= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)} \end{aligned}$$

d'où finalement en multipliant par e : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3$

3) Au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right)^3 + o(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3) \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)} \end{aligned}$$

4) Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Ainsi,

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right)^2 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 - x^3 + o(x^3) \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{e^x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \times \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\
&= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

- 1) **Attention :** on ne peut pas utiliser le DL de $(1+x)^\alpha$ car α doit être constant, ici les exposants sont x et $\frac{1}{x}$ donc sont des variables.

Pour tout $x > 0$ on a $(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x = \exp(x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}))$

Cherchons la limite de $x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

$2^{1/x} = \exp(\ln(2)/x)$ avec $\frac{\ln(2)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $2^{1/x} = 1 + \frac{\ln(2)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. De même, $3^{1/x} = 1 + \frac{\ln(3)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $5^{1/x} = 1 + \frac{\ln(5)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x} = 1 + \frac{\ln(2) + \ln(3) - \ln(5)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln\left(\frac{6}{5}\right) \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

En composant par $\ln(1+u) = u + o(u)$ on obtient que $\ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}) = \ln\left(\frac{6}{5}\right) \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}) = \ln\left(\frac{6}{5}\right) + o(1)$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}) = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$ et finalement par composition de limites, $(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = \frac{6}{5}$.

2) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right).$

Or, $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$.

Il s'ensuit que $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ par composition avec $\ln(1+u) = u + o(u)$ donc $\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6} + o(1)$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{6}}$.

3) On pose le changement de variable $u = x - 1$ et on étudie $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(5\pi(u+1))}{\sin(4\pi(u+1))}$.

On a $\sin(5\pi(u+1)) = \sin(5\pi u + \pi) = -\sin(5\pi u)$ et $\sin(4\pi(u+1)) = \sin(4\pi u + 4\pi) = \sin(4\pi u)$.

Lorsque u tend vers 0 on a $\sin(5\pi u) \sim 5\pi u$ et $\sin(4\pi u) \sim 4\pi u$ donc $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin(5\pi u)}{\sin(4\pi u)} = \frac{-5\pi}{4\pi} = -\frac{5}{4}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x} = -\frac{5}{4}$.

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x(1 - \frac{x}{2} + o(x))} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2} + o(x) \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + o(1)$ et finalement $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 :

- 1) Lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $1 - \cos(1/n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$ donc par comparaison de séries positives $\sum_{n \geq 1} (1 - \cos(1/n))$ converge.

2) Lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\begin{aligned} e^{1/n} - e^{1/(n+1)} &= e^{1/(n+1)} \left(e^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1 \right) \\ &= e^{1/(n+1)} \left(e^{1/(n(n+1))} - 1 \right) \\ &= e^{1/(n+1)} \left(\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$ donc par comparaison de séries positives $\sum_{n \geq 1} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$ converge.

3) Lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\cos(1/n)}{1 - \sin(1/n)}\right) &= \ln\left(\frac{1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

or la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge donc par comparaison de séries positives la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{\cos(1/n)}{1 - \sin(1/n)}\right)$ diverge.

4) Lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\begin{aligned} n^{8/3}(\cos(1/n) - e^{-1/(2n^2)}) &= n^{8/3} \left[\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{48n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \right] \\ &= n^{8/3} \left(\frac{1}{48n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \\ &= \frac{1}{48n^{4/3}} + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) \end{aligned}$$

donc $n^{8/3}(\cos(1/n) - e^{-1/(2n^2)}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{48n^{4/3}}$. Or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{4/3}}$ converge car $\frac{4}{3} > 1$ donc par comparaison de séries positives la série converge.

Correction de l'exercice 4 :

1) Pour tout réel x , $f(x)$ est définie si et seulement si $1 + x > 0$ et $\ln(1 + x) - x \neq 0$.

Or, pour tout $x \geq -1$, $\ln(1 + x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ (on peut le prouver en étudiant la fonction $h(x) = x - \ln(1 + x)$ par exemple).

Ainsi, f est définie sur $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$.

2) En 0 on a $\ln(1 + x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $x e^x - \sin(x) - x^2 = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - x + \frac{x^3}{6} - x^2 + o(x^4) = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$.
Ainsi,

$$f(x) = \frac{\frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{-x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \frac{\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
&= -2 \left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^2) \right) \\
&= - \left(\frac{4x}{3} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{4x^2}{9} + o(x^2) \right) \\
&= - \left(\frac{4x}{3} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{7x^2}{36} + o(x^2) \right) \\
&= - \frac{4x}{3} - \frac{8x^2}{9} - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \\
&= - \frac{4x}{3} - \frac{11x^2}{9} + o(x^2)
\end{aligned}$$

- 3) D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc on peut prolonger f en une fonction g continue définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
- 4) D'après la question 2, pour tout $x \neq 0$ on a $\frac{g(x)}{x} = -\frac{4}{3} - \frac{11x}{9} + o(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\frac{4}{3}$. Ainsi g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{4}{3}$.
- 5) Puisque $g(0) = 0$, l'équation de la tangente en 0 à Γ est $y = -\frac{4}{3}x$. Dans le développement limité de g au voisinage de 0, le terme suivant $-\frac{4}{3}x$ est $-\frac{11x^2}{9}$ donc au voisinage de 0, la courbe Γ est située en dessous de T .

Correction de l'exercice 5 :

- 1) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$, $x \mapsto \sin x$ est continue sur \mathbb{R} donc par composition $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$. Enfin, $x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R} donc f est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues.

Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ donc $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc puisque $f(0) = 0$ on en déduit que f est continue en 0.

Finalement, f est bien continue sur \mathbb{R} .

- 2) f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme produit et composée de fonctions dérivables, comme dans la question 1.

De plus, pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ donc $-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

- 3) Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or, $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ et $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$. En effet, si $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ on a $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2\pi n) = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et si $x_n = \frac{1}{(2\pi n + \pi)}$ on a $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2\pi n + \pi) = \cos(\pi) = -1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$ ce qui contredit l'unicité de la limite.

On en déduit que $f'(x)$ ne tend pas vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0 donc f' n'est pas continue en 0, donc f n'est pas C^1 sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 6 :

- 1) Pour tout réel x , $f(x)$ est défini si et seulement si $x^2 - 9x + 8 \geq 0$. Or $x^2 - 9x + 8 = (x - 8)(x - 1)$ donc f est définie sur $] -\infty; 1] \cup [8; +\infty[$.

Pour tout x dans l'ensemble de définition de f , on a

$$\sqrt{x^2 - 9x + 8} = |x| \sqrt{1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

$$= |x| \left(1 - \frac{9}{2x} + o\left(\frac{9}{2x}\right) \right)$$

d'après le DL de $\sqrt{1+u}$ lorsque $u \rightarrow 0$

m

Ainsi, si $x > 0$ on a $f(x) = x - \frac{9}{2} + o(1)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ donc $f(x) - x + \frac{9}{2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ donc la droite d'équation $y = x - \frac{9}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

De même, si $x < 0$ on a $f(x) = -x + \frac{9}{2} + o(1)$ donc la droite d'équation $y = -x + \frac{9}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

- 2) Pour tout réel x , $g(x)$ est défini si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$ et $x \neq -1$ donc g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\text{En } +\infty \text{ et en } -\infty \text{ on a } \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Ainsi, $\exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) = 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $g(x) = x + 2 + o(2)$ et ainsi $x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Correction de l'exercice 7 : On a $P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ donc pour tout $x \neq 1$, $P'(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$.

$P'(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ donc 1 n'est pas racine de P' , et pour tout $x \neq 1$ on a $P'(x) = 0 \iff 1-x^n = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$ car n est pair.

Ainsi, (-1) est la seule racine de P' . Montrons que -1 n'est pas racine de P , c'est à dire que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \neq 0$. Pour cela on étudie la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

Les suites $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $b_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$ sont adjacentes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0$ donc (a_n) est strictement décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0$ donc (b_n) est strictement croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n - a_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Ainsi, $\forall n \geq 2$, $b_0 < b_n \leq a_n < a_1$ (et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ mais la limite ne nous sert pas ici).

On en conclut que $\forall n \geq 2$, $b_0 < u_n < a_1$ donc $-1 < u_n < -\frac{1}{2}$. Ainsi, $P(-1) \neq 0$.

Finalement, P n'a pas de racine multiple.

Correction de l'exercice 8 :

- 1) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ les coefficients réels de P tels que $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P . Alors $P(\lambda) = 0$ donc $\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$. En passant au conjugué dans cette égalité on obtient :

$$\overline{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k} = 0$$

donc par propriété algébrique du conjugué :

$$\sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{\lambda}^k = 0$$

Or les a_i sont réels donc $\forall i, \overline{a_i} = a_i$ et ainsi $\sum_{k=0}^n a_k \overline{\lambda}^k = 0$, c'est à dire $P(\overline{\lambda}) = 0$, $\overline{\lambda}$ est bien racine de P .

Comme P est à coefficient réel, toutes les dérivées de P sont des polynômes à coefficients réels donc pour tout $k \geq 0$, $P^{(k)}(\lambda) = 0 \iff P^{(k)}(\overline{\lambda}) = 0$ d'où l'on déduit que $\overline{\lambda}$ a la même multiplicité que λ si λ est racine de P .

- 2) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines réelles de P et $\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_p}$ les racines complexes non réelles de P . Notons k_{λ_i} et k_{μ_i} la multiplicité de ces racines.

Alors P se factorise sous la forme $P(x) = a_n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{k_{\lambda_i}} \times \prod_{j=1}^p (X - \mu_j)^{k_{\mu_j}} \times \prod_{j=1}^p (X - \overline{\mu_j})^{k_{\mu_j}}$ car pour tout j , μ_j et $\overline{\mu_j}$ ont la même multiplicité.

Ainsi, $P(x) = a_n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{k_{\lambda_i}} \times \prod_{j=1}^p [(X - \mu_j)(X - \overline{\mu_j})]^{k_{\mu_j}} = a_n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{k_{\lambda_i}} \prod_{j=1}^p (X^2 - 2\operatorname{Re}(\mu_j)X + |\mu_j|^2)^{k_{\mu_j}}$.

Si toutes les racines réelles de P ont une multiplicité paire, alors le degré de ce polynôme est pair car pour tout j , $\deg(X^2 - 2\operatorname{Re}(\mu_j)X + |\mu_j|^2)^{k_{\mu_j}} = 2k_{\mu_j}$ est pair.

Correction de l'exercice 9 :

1) On a

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1$$

$= \frac{1}{2}(e - 1)$

2) Par intégration par partie :

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 (1+t) \times \frac{1}{(1+t)} dt$$

$= 2 \ln(2) - 1$

3) Par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin x dx &= [-x^2 \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x dx \\ &= \pi^2 + [2x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin x dx \\ &= \pi^2 + 0 - [-2 \cos x]_0^\pi \\ &= \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

$= \pi^2 - 4$

4) On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^5} &= \int_0^1 (1+x)^{-5} dx \\ &= \left[\frac{(1+x)^{-4}}{-4} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{-1}{4(1+x)^4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^4} \right) \\ &= \frac{15}{64} \end{aligned}$$

$= \frac{15}{64}$

5) On a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{e^5}{(1+e^u)^2} du &= \left[\frac{-1}{1+e^u} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^2} \\ &= \frac{e-1}{2+2e^2} \end{aligned}$$

$= \frac{e-1}{2+2e^2}$

6) On a :

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= [2 \arctan(\sqrt{x})]_1^3 \\
&= 2 \arctan(\sqrt{3}) - 2 \arctan(1) \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}}$ est continue sur $[0; +\infty[$. En $+\infty$ on a $x^2 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \sim \frac{x^2 e^{-x}}{x} \sim x e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $x + \frac{1}{n+1} \leq x + \frac{1}{n}$ donc $\frac{1}{x + \frac{1}{n+1}} \geq \frac{1}{x + \frac{1}{n}}$ donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leq \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n+1}}$$

On en déduit en intégrant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$$

donc (u_n) est croissante.

2) Pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{-1} \leq e^{-x}$ donc $\frac{e^{-1}}{x + \frac{1}{n}} \leq \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}}$.

En intégrant sur $[0; 1]$, on obtient $\frac{1}{e} [\ln(x + \frac{1}{n})]_0^1 \leq v_n$. Or $[\ln(x + \frac{1}{n})]_0^1 = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(\frac{1}{n}) = \ln(n(1 + \frac{1}{n})) = \ln(n+1)$ d'où $\frac{\ln(n+1)}{e} \leq v_n$.

De plus, pour tout $x \geq 1$, $\frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leq e^{-x}$ donc $w_n \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-A}) = e^{-1}$ d'où $0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$ (w_n est l'intégrale d'une fonction positive sur $[1; +\infty[$ donc est positif).

3) Puisque $u_n = v_n + w_n$ d'après la relation de Chasles et que $w_n \geq 0$, on a $u_n \geq v_n \geq \frac{\ln(n+1)}{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{e} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4) a) $x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0; 1]$ et au voisinage de 0 on a $\frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{1 - (1 - x + o(x))}{x} = 1 + o(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1$. Cette fonction se prolonge par continuité en 0 donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$ $1 - e^{-x} \geq 0$ donc $\frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \geq 0$, et $\frac{1}{x + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{x}$ donc $\frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leq \frac{1 - e^{-x}}{x}$, ainsi en intégrant sur $[0; 1]$ on obtient $0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq I$.

c) D'après l'encadrement précédent, on a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x + \frac{1}{n}} - v_n \leq I$$

donc $0 \leq \ln(n+1) - u_n \leq I$.

En divisant par $\ln(n+1)$ on obtient $0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{I}{\ln(n+1)}$ donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)}) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$ d'où $u_n \sim \ln(n+1)$.

Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n) + o(\ln(n))$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$, donc finalement $u_n \sim \ln(n)$.

Correction de l'exercice 11 :

1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie pour tout t tel que $\ln(t)$ existe et $\ln(t) \neq 0$. Elle est donc définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Si $x \in]0; 1[$, alors $x^2 \in]0; 1[$ donc l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ a un sens. Si $x \in]1; +\infty[$, alors $x^2 \in]1; +\infty[$ donc $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ a aussi un sens. Finalement, cette intégrale a un sens si et seulement si $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

- 2) Si G est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$, alors on a $f(x) = H(x^2) - H(x)$. f est donc dérivable comme différence et composée de fonctions dérivables et $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$. Pour tout $x \in]0; 1[$, $x-1 < 0$ et $\ln(x) < 0$ donc $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $x-1 > 0$ et $\ln(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

- 3) Pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) - g(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1-\ln t}{(t-1)\ln t} dt$.

Or, $t-1-\ln(t) = t-1-(t-1)+\frac{(t-1)^2}{2}+o((t-1)^2)$ donc $t-1-\ln t \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{(t-1)^2}{2}$, et $(1-t)\ln t \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (1-t)^2$ d'où $\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2}$. On peut donc prolonger cette fonction par continuité en 1, et pour toute fonction φ continue sur $]0; 1]$ on a $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \phi(t) dt = \int_0^0 \phi(t) dt = 0$ par continuité de $x \mapsto \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$.

Finalement on a donc bien $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0$. Calculons $g(x)$ explicitement :

$$\begin{aligned} \forall x \neq 1, \quad \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} &= [\ln(t-1)]_x^{x^2} \\ &= \ln(x^2-1) - \ln(x-1) \\ &= \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \\ &= \ln(x+1) \end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ln(2)$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2)$.

- 4) Étudions la limite de $\frac{f(x) - \ln(2)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

$$\frac{f(x) - \ln(2)}{x-1} = \frac{f(x) - g(x)}{x-1} + \frac{g(x) - \ln(2)}{x-1}$$

On a : $f(x) - g(x) = \int_x^{x^2} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} dt$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} = \frac{1}{2}$ comme on l'a vu à la question précédente, il existe donc un voisinage $]1-a, 1+a[$ de 1 tel que $\forall t \in]1-a, 1+a[$, $\left| \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Ainsi, pour x suffisamment proche de 1, on a $x \in]1-a, 1+a[$ et $x^2 \in]1-a, 1+a[$ donc par inégalité triangulaire

$$\left| \int_x^{x^2} \left(\frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} - \frac{1}{2} \right) dt \right| \leq \int_x^{x^2} \left| \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} - \frac{1}{2} \right| dt \leq (x^2-x)\varepsilon$$

d'où :

$$\left| f(x) - g(x) - \int_x^{x^2} \frac{1}{2} dt \right| \leq x(x-1)\varepsilon$$

donc

$$\left| \frac{f(x) - g(x)}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \int_x^{x^2} \frac{1}{2} dt \right| \leq \varepsilon$$

c'est à dire :

$$\left| \frac{f(x) - g(x)}{x(x-1)} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \times \frac{f(x) - g(x)}{x-1} = \frac{1}{2}$ donc que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x-1} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

D'autre part on a $\frac{g(x) - \ln 2}{x-1} = \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{x-1} = \ln'(2) = \frac{1}{2}$ qu'on obtient comme limite d'un taux d'accroissement.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \ln(2)}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

Correction de l'exercice 12 :

- 1) f est continue sur $[a, b]$ qui est un intervalle fermé borné, donc f atteint son maximum et son minimum sur $[a, b]$. Il existe donc x_a tel que $\forall x \in [0, 1], f(x_a) \leq f(x)$ et alors a existe et $a = f(x_a)$ et il existe $x_b \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1], f(x_b) \geq f(x)$ et alors b existe et $b = f(x_b)$.
- 2) Pour tout $y \in [a, b]$, puisque f est continue sur $[a, b]$ et atteint les valeurs a et b , il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. On a alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Pour tout $y \in [a, b]$, $f(y) = y$ donc $f|_{[a,b]}$ est la fonction identité.
- 3) Supposons f non constante. Puisque a est le minimum de f et que c'est aussi un réel de $[0, 1]$ et que $f(a) = a$, alors ou bien $a = 0$ (a est une borne de l'intervalle), ou bien $a \in]0; 1[$ et $f'(a) = 0$ (on ne peut pas avoir $a = 1$ sinon on aurait f constante égale à 1 car f est à valeurs dans $[0, 1]$). Or $a < b$ (car f non constante) et $f|_{[a;b]} : x \mapsto x$ donc $f'|_{[a;b]} = 1$ donc la dérivée à gauche de f en a vaut 1, donc $f'(a) = 1$. On en déduit finalement $a = 0$, et de la même façon $b = 1$.
- 4) Dans cette question on suppose seulement f continue.

Le résultat de la question 2 est alors une condition suffisante. En effet, s'il existe un intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) = x$ et tel que pour tout $x \in [0, 1], f(x) \in [a, b]$, alors pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(f(x)) = f(x)$ car f est l'identité sur $[a, b]$.

L'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ vérifiant $f \circ f = f$ est donc l'ensemble des fonctions définies par morceau de la forme

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in [0, a] \\ x & \text{si } x \in [a, b] \\ f_2(x) & \text{si } x \in [b, 1] \end{cases}$$

avec $f_1(a) = a$ et $f_2(b) = b$, et f_1, f_2 à valeurs dans $[a, b]$ et continues sur $[0, a]$ et sur $[b, 1]$ respectivement.

Correction de l'exercice 13 :

- 1) f est continue sur $]-\infty; 0]$ et sur $]0; +\infty[$ car sa restriction à chacun de ces intervalles est une fonction continue (par opérations usuelles).

Montrons que f est continue en 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{x} = +\infty$ donc par composition $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Finalement f est bien continue sur \mathbb{R} .

- 2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0; \infty[$ et \exp est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc par composition $x \mapsto e^{-1/x}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

- 3) Pour $n = 1$, on a pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

donc en posant $P_1(x) = x^2$ on a bien $f'(x) = P_1\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ on ait

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$$

avec P_n un polynôme, alors $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P'_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-1/x} \end{aligned}$$

En posant $P_{n+1}(X) = X^2 P_n - X^2 P'_n$, alors P_{n+1} est bien un polynôme et on a :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$$

La propriété est donc vraie pour $n + 1$. Par récurrence on en conclut qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- 4) Montrons par récurrence que pour tout entier n , $f^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R} et que $f^{(n)}(0) = 0$.

f est dérivable sur $]-\infty; 0]$ et sur $]0; +\infty[$. En 0, on a :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 0 = 0$
- Si $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-1/x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} e^{-1/x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$ par croissance comparée donc par composition de limites $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Supposons que le résultat est vrai pour un entier n quelconque fixé. Alors

- $\forall x < 0$, $f^{(n)}(x) = 0$ par calcul de dérivée et $f^{(n)}(0) = 0$ par hypothèse de récurrence, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0$.
- Si $x > 0$, $\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} P_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x} = X P_n(X) e^{-X}$ en posant $X = \frac{1}{x}$.

Or par croissance comparée $\lim_{X \rightarrow +\infty} X P_n(X) e^{-X} = 0$ car P_n est un polynôme, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0$

On en conclut que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 (donc sur \mathbb{R}) et que $f^{(n)}(0) = 0$.

Par récurrence on en déduit finalement que le résultat est vrai pour tout entier n . On a donc bien $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 14 :

- 1) $u_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^1 = e - 1$
 $u_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx = [-x e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = e - 2$
- 2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq 1 - x \leq 1$ et donc $1 \leq e^{1-x} \leq e$. En multipliant par x^n et en intégrant sur $[0; 1]$ on obtient donc :

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx$$

d'où :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}}$$

- b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ on en déduit par encadrement $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.
- 3) a) Une intégration par partie donne pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = [-x^n e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 n x^{n-1} e^{1-x} dx$$

$$\boxed{= -1 + n u_{n-1}}$$

b) Procédons par récurrence :

- **Initialisation :** $u_0 = e - 1$ d'après la question 1) et $e - \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} = e - 1$, donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :** Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel n . Alors :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{d'après la question précédente}$$

$$\begin{aligned} &= (n+1)n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) - 1 \\ &= (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) - \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right) \end{aligned}$$

l'égalité est alors vraie pour l'entier $n + 1$. La propriété est donc héréditaire.

— Conclusion : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$.

4) Pour tout $n \geq 1$, $u_n - v_n = nu_{n-1} - 1 - (nv_{n-1} - 1) = n(u_{n-1} - v_{n-1})$ donc par une récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - v_n = n!(u_0 - v_0)$$

Le terme de droite diverge si $u_0 \neq v_0$, et comme $(u_n)_{n \geq 0}$ converge [on en déduit que $(v_n)_{n \geq 0}$ diverge].

5) a) Appliquons deux fois la relation de récurrence à u_{n+2} :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \quad u_{n+2} &= (n+2)u_{n+1} - 1 \\ &= (n+2)[(n+1)u_n - 1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)u_n - (n+2) - 1 \end{aligned}$$

donc en divisant par $(n+2)(n+1)$:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

b) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

De plus on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+2} = 0$ donc $\frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = o\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, d'après la question précédente et par somme :

$$u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(c'est à dire $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$).

Correction de l'exercice 15 :

1) Pour tout $n \geq 2$ posons $f_n(x) = x^n - 2x - 1$. Cette fonction est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \geq 0, \quad f'_n(x) = nx^{n-1} - 2$$

Pour tout $x > 1$, on a $x^{n-1} > 1$ donc $nx^{n-1} > 2$ et donc $f'_n(x) > 0$. On en déduit que f_n est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. Comme $f_n(1) = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, et que f est continue (car dérivable) sur $]1; +\infty[$, on peut en conclure d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

De plus, cette équation n'admet pas de solution dans l'intervalle $[0; 1]$ car si $x \in [0; 1[, x^n \in [0; 1[$ et $2x + 1 \geq 1$ et si $x = 1$ on a $x^n = 1$ et $2x + 1 = 3$.

On en conclut que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et que $u_n \geq 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) &= u_n^{n+1} - 2u_n - 1 - (u_n^n - 2u_n - 1) \\
 &= u_n^{n+1} - u_n^n \\
 &= u_n^n(u_n - 1) \\
 &\geq 0 \quad \text{car } u_n \geq 1 \text{ et } u_n \geq 0
 \end{aligned}$$

Comme $f_n(u_n) = 0$ on en déduit que $f_{n+1}(u_n) \geq 0$ donc que $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est croissante sur $[1; +\infty[$ on en conclut que $u_n \geq u_{n+1}$, et ce quel que soit $n \geq 2$.

On en conclut que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 1 on en conclut qu'elle converge vers une limite finie $\ell \geq 1$.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell > 1$. Comme (u_n) converge en décroissant vers ℓ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$ donc $u_n^n \geq \ell^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n = +\infty$ car $\ell > 1$. Par comparaison on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = +\infty$.

Or pour tout $n \geq 2$, $u_n^n = 2u_n + 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2u_n + 1) = +\infty$. Or par somme de limites on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2u_n + 1) = 2\ell + 1$ ce qui contredit l'unicité de la limite.

On en conclut que $\ell = 1$.

4) a) Pour tout $n \geq 2$ on a $u_n^n = 2u_n + 1$ donc $n \ln(u_n) = \ln(2u_n + 1)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 n \ln(1 + \varepsilon_n) &= n \ln(u_n) \\
 &= \ln(2u_n + 1) \\
 &= \ln(2\varepsilon_n + 3)
 \end{aligned}$$

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ donc $n \ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\varepsilon_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(3 + 2\varepsilon_n) = \ln(3)$ d'où
 $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n = \ln(3)}$.

Correction de l'exercice 16 :

1) f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}
 \forall x \geq 0, \quad f'_n(x) &= 1 - \frac{1}{1+x^2} \\
 &= \frac{x^2}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

donc pour tout réel $x > 0$, $f'_n(x) > 0$. On en déduit que f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $f_n(0) = -n^\alpha < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et f_n est continue sur $[0; +\infty[$ (comme somme de fonctions continues), donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : il existe un unique réel u_n dans l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(u_n) = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(u_n) &= f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \\
 &= u_n - \arctan(u_n) - (n+1)^{\alpha} - (u_n - \arctan(u_n)) - n^\alpha \\
 &= n^\alpha - (n+1)^\alpha \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

d'où $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$ et comme f_{n+1} est croissante sur $[0; +\infty[$ on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$, et ce pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Supposons que (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n - \arctan(u_n) = n^\alpha$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \arctan(u_n)) = \ell - \arctan(\ell)$ par somme de limite et continuité de arctan, tandis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ ce qui contredit l'unicité de la limite. On en conclut que (u_n) ne converge pas donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3) Posons $g(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$, cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

donc g est constante. Comme $g(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, g est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$ donc :

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

4) Par définition de u_n on a :

$$u_n - n^\alpha = \arctan(u_n)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

donc

$$u_n - n^\alpha - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

et donc

$$n^\alpha \left(u_n - n^\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$ donc $\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$. Enfin comme $u_n = n^\alpha + \arctan(u_n)$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(u_n) = \frac{\pi}{2}$, on a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$ et on en conclut donc que :

$$-n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^\alpha}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha (u_n - n^\alpha - \frac{\pi}{2}) = -1$.